Řešení implicitní funkce

neděle 23. května 2021 11:58

(3)

$$\overset{f(x,y)}{\parallel}$$

$$x^2+2xy^2+y^4-y^5=0 \quad , \quad (0,1)$$

$f(0,1)=1-1=0$ ✓

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (polynom)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4xy+4y^3-5y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=4-5=-1\neq 0$ ✓

Předpoklady ověřeny existuje tedy $\varphi:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$, že $\varphi(0)=1$ a $f(x,\varphi(x))=0 \quad x\in(-\delta,\delta)$.

Spočítáme $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Máme

$$x^2+2x\varphi^2(x)+\varphi^4(x)-\varphi^5(x)=0$$

tedy

$$2x+2\varphi^2(x)+4x\varphi(x)\varphi'(x)+4\varphi^3(x)\varphi'(x)-5\varphi^4(x)\varphi'(x)=0$$

a pro $x=0$, $\varphi(0)=1$ dostáváme

$$0+2+0+4\varphi'(0)-5\varphi'(0)=0 \Rightarrow \varphi'(0)=2 \quad , \text{ dále}$$

$$2+4\varphi(x)\varphi'(x)+4\varphi(x)\varphi'(x)+4x[\varphi'(x)]^2+4x\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$+12\varphi^2(x)[\varphi'(x)]^2+4\varphi^3(x)\varphi''(x)-20\varphi^3(x)[\varphi'(x)]^2-5\varphi^4(x)\varphi''(x)=0$$

a pro $x=0$, $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=2$

$$2+8+8+0+0+48+4\varphi''(0)-80-5\varphi''(0)=0$$

a tedy $\varphi''(0)=-14$

(5)

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1, \qquad (\pi,0)$$

$f(x,y)=\sin(xy)+\cos(xy)-1$

$f(\pi,0)=0+1-1=0$ ✓

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\cos(xy)-x\sin(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0)=\pi-0=\pi$

Existuje tedy $\varphi(\pi-\delta,\pi+\delta)\to\mathbb{R}$, $\varphi(\pi)=0$ splňující

$$\sin(x\varphi(x))+\cos(x\varphi(x))-1=0$$

$$(\varphi(x)+x\varphi'(x))\cos(x\varphi(x))-(\varphi(x)+x\varphi'(x))\sin(x\varphi(x))=0$$

pro $x=\pi$, $\varphi(\pi)=0$ dostáváme

$$\pi\varphi'(\pi)-\pi\cdot 0=0 \implies \varphi'(\pi)=0$$

dále

$$\left(\varphi'(x)+\varphi'(x)+x\varphi''(x)\right)\left[\cos(x\varphi(x))-\sin(x\varphi(x))\right]+$$

$$\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)\left[-\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)\sin(x\varphi(x))-\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)\cos(x\varphi(x))\right]=0$$

pro $x=\pi$, $\varphi(\pi)=0$, $\varphi'(\pi)=0$

$$\pi\varphi''(\pi)\cdot[1-0]+0\cdot(\text{něco})=0 \Rightarrow \varphi''(\pi)=0$$

(10)

$$x=e^u+u\sin v,\quad y=e^u-u\cos v,\qquad \left(e+1,e,1,\tfrac{\pi}{2}\right)$$

položíme $$F(x,y,u,v)=\begin{pmatrix} e^u+u\sin v-x \\ e^u-u\cos v-y \end{pmatrix}$$

$$F\left(e+1,e,1,\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} e+1-(e+1) \\ e-0-e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark,\qquad F\in C^\infty(\mathbb{R}^4)\ \checkmark$$

$$J_F(x,y,u,v)=\begin{pmatrix} -1, & 0, & e^u+\sin v, & u\cos v \\ 0, & -1, & e^u-\cos v, & u\sin v \end{pmatrix}$$

a

$$J_F\left(e+1,e,1,\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{J_x}\middle|\underbrace{\begin{pmatrix} e+1 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix}}_{J_u}\right)$$

$\det J_u = e+1 \neq 0$

Tedy existuje $\varphi : U((e+1,e),\delta) \to \mathbb{R}^2$ splňující $\varphi(e+1,e) = (1,\frac{\pi}{2})$

a $F(x,y,\varphi(x,y)) = \binom{0}{0}$.

Dále platí

$$J_\varphi(e+1,e) = -J_u^{-1} \cdot J_x = -\frac{1}{e+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e & e+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e+1} & 0 \\ -\frac{e}{e+1} & 1 \end{pmatrix}$$